

Рассмотрена система оценивания величин, выраженных в виде нечетких множеств. Основой для оценивания является нечеткая логика. Определены способы задания основных логических операций. Приведены результаты анализа оценивания величин при различных функциях принадлежности и различных функциях, задающих операторы t -норм и t -конорм.

Введение

Под величиной будем понимать сущность, в которой проявляются измеряемые, вычисляемые или оцениваемые свойства, свойства эти являются частью описания объекта, явления, процесса и определяют аспекты их поведения. Характерным признаком величины является изменчивость, причем пределы возможных изменений могут быть достаточно точно определены априори.

В теории оценивания можно выделить несколько подходов:

- *логико-философский (аксиологический)* подход, здесь оценка – это субъективное сравнение или отношение, касающееся объектов, событий, явлений и выраженное в положительной или отрицательной форме, в форме согласия или критики, в предпочтении или неприятии, одобрении или осуждении [1];
- *когнитивно-лингвистический* подход предполагает переход от ценностной ориентации оценок к расширенному их толкованию [2], здесь различают четыре типа оценок: 1) количественные оценки, выраженные через описание размерности оцениваемых объектов; 2) прототипические оценки – это сравнение со свойствами, присущими большинству рассматриваемых предметов оценивания; шкала прототипических оценок содержит значения нормы, минимум и максимум; 3) гомеостатические или целевые оценки харак-

теризуют имеющиеся у оценивающего субъекта ресурсы, требующиеся для достижения некоторой цели; шкала данного типа оценок упорядочивает затраты ресурсов от минимального до максимального; 4) общие оценки – это по сути оценки в их логико-философском толковании;

- *статистическая теория оценок* нацелена на определение количественных характеристик случайных величин в условиях ограниченного числа испытаний, основана она на методах теории вероятностей; основой этих методов является положение о том, что усредненные случайные характеристики изучаемых объектов, событий и явлений приближаются к детерминированным при возрастании числа измерений, испытаний или наблюдений;
- *оценивание в интервальном анализе* имеет своей целью получение приближенного ответа при решении задач и получение оценки возможной погрешности, полученного результата. Природа неопределенности величин, с которой имеет дело интервальный анализ, принципиально отличается от той, с которой оперирует статистический анализ. Последний имеет дело со случайными величинами, в то время как интервальный анализ с ненадежными данными. Основным понятием в интервальном анализе является интервальное число, которое задается двумя вещественными числами, являющимися нижней и верхней оценками [3].

В нашей работе рассматривается задача нечеткого оценивания, которая сводится к нахождению некоторой величины на основе уже имеющихся оценок величин, полученных различными методами, представленных в различных шкалах и разными способами.

Постановка задачи

Предметом оценивания является экстенсивно выраженные свойства объекта, явления, процесса. Правило оценивания любой величины будем представлять в виде структуры, включающей в себя три компонента, каждый из которых выражает: относительность оценивания, характер оценивания, статистику либо динамику измеряемых свойств объекта. В соответствии с этим будем различать абсолютные и сравнительные, четкие и нечеткие, статические и динамические оценки величин [4]. Полная оценка величины включает все три составные части.

Суть оценивания заключается в сопоставлении данных из двух разнотипных шкал: абсолютной нечеткой статической (АНС) и сравнительной нечеткой статической (СНС). Результатом такого сопоставления будет значение величины, выраженное в абсолютной нечеткой статической шкале. Указанная система оценивания величин может рассматриваться как нечеткая система типа "много_входов-один_выход" со следующей базой правил:

Правило 1: *ЕСЛИ* АНС₁ = A₁₁ *И* СНС = A₂₁ *ТО* АНС₂ = B₁ *А ТАКЖЕ*,

Правило 2: *ЕСЛИ* АНС₁ = A₁₂ *И* СНС = A₂₁ *ТО* АНС₂ = B₂ *А ТАКЖЕ*,

..... (1)

Правило n: *ЕСЛИ* АНС₁ = A_{1n} *И* СНС = A_{2n} *ТО* АНС₂ = B_n *А ТАКЖЕ*,

где АНС₁, СНС – входные переменные, АНС₂ – выходные переменные, A_{1i}, A_{2i} и B_i – нечеткие множества, которые определены на универсальных множествах X₁, X₂, Y, соответственно.

Для получения четкого выходного значения b при поступлении на вход системы оценивания четких a₁ и a₂ необходимо выполнить следующие четыре действия:

- 1) Объединить посылки в антецеденте каждого правила, то есть выполнить операцию конъюнкции *И*.
- 2) Выполнить отношение импликации в каждом правиле (*ЕСЛИ... ТО...*).
- 3) Объединить правила, выполнив операцию *А ТАКЖЕ*, и получить нечеткое выходное значение из множества объединенных правил, то есть определить итоговую функцию принадлежности.
- 4) Преобразовать итоговую функцию принадлежности в четкое значение b; эта операция носит название "дефазификация".

В настоящей работе предлагается и исследуется нечеткий вывод в приведенной системе оценивания; в качестве варьируемых параметров выступают операторы конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

Основные операции нечеткой логики и алгоритмы их выполнения

Определение. Нечеткое отрицание – это унарная операция, определяемая как

$$c(a) = 1 - a, \forall a \in [0, 1],$$

удовлетворяющая следующим свойствам:

$$c: [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$c(0) = 1, c(1) = 0, c(c(a)) = a,$$

$$\forall a_1, a_2 ((a_1, a_2 \in [0, 1]) \wedge ((a_1 < a_2) \rightarrow (c(a_1) > c(a_2)))).$$

Операции конъюнкции и дизъюнкции определяются через *t*-нормы и *t*-конормы.

Определение. Функция $T_n: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ называется *t*-нормой (*t*-нормальной функцией) на интервале [0, 1], а функция $S_n: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ называется *t*-конормой (*t*-конормальной функцией) на интервале [0, 1], если для $a_1, a_2, \dots, a_n, d_1, d_2, \dots, d_n \in [0, 1]$ указанные функции обладают следующими свойствами:

коммутативность

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = T_n(a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = S_n(a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n),$$

где $a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^n$ – это перестановки a_1, a_2, \dots, a_n ;

ассоциативность

$$\begin{aligned} T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= T_{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_i, T_{n-i}(a_{i+1}, \dots, a_k, \dots, a_n)) = \\ &= T_{n-j+1}(T_j(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n), \\ S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &= S_{i+1}(a_1, a_2, \dots, a_i, S_{n-i}(a_{i+1}, \dots, a_k, \dots, a_n)) = \\ &= S_{n-j+1}(S_j(a_1, a_2, \dots, a_j), a_{j+1}, \dots, a_n); \end{aligned}$$

монотонность

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq T_n(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq S_n(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

для всех $a_i \leq d_i$.

Граничные условия:

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) = T_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = S_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n) = 1,$$

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) = 0.$$

Кроме того, операторы *T* и *S* являются двойственными по отношению друг к другу:

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 - S_n(1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n),$$

$$S_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 - T_n(1 - a_1, 1 - a_2, \dots, 1 - a_n),$$

при условии, что операция отрицания задается как $c(a) = 1 - a$.

Рассмотрим некоторые *t*-нормальные и *t*-конормальные функции и наиболее интересные алгоритмы их вычисления.

Функции Заде. Для двух переменных функции Заде задаются следующим образом:

$$T(a, b) = \min(a, b), S(a, b) = \max(a, b);$$

для *n* переменных:

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min(a_1, a_2, \dots, a_n), S(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Вероятностные функции. Для двух переменных:

$$T(a, b) = a \cdot b, S(a, b) = a + b - a \cdot b;$$

для n переменных:

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

$$S(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n a_i a_j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k>j}^n a_i a_j a_k \pm \dots \pm \prod_{i=1}^n a_i \right).$$

Алгоритм вычисления t -конормальной вероятностной функции S приведен ниже.

Вход. Массив четких значений (x_1, x_2, \dots, x_n) .

Выход. Значение S t -конормы.

Шаг 1. Вычислить $a_1=A(x_1), a_2=A(x_2), \dots, a_n=A(x_n)$,

Шаг 2. Вычислить $S = a_n, i=n-1$.

Шаг 3. Пока $i>0$, выполнять:

3.1. Вычислить $S = a_i + (1 - a_i) \cdot S$;

3.2. Вычислить $i = i - 1$.

Шаг 4. Выход S .

Функции Лукасевича. Для двух переменных:

$$T(a, b) = \max(a + b - 1, 0), S(a, b) = \min(a + b, 1);$$

для n переменных:

$$T(a_1, \dots, a_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n a_i - (n-1), 0\right),$$

$$S(a_1, \dots, a_n) = \min\left(\sum_{i=1}^n a_i, 1\right).$$

Функции Швайцера и Скляра для двух переменных имеют следующий вид:

$$T(a, b) = 1 - ((1-a)^p + (1-b)^p - (1-a)^p \cdot (1-b)^p)^{1/p},$$

$$S(a, b) = (a^p + b^p - a^p \cdot b^p)^{1/p}, p>0,$$

или для n переменных

$$T(a_1, \dots, a_n) = 1 - \left(\sum_{i=1}^n (1-a_i)^p - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n (1-a_i)^p (1-a_j)^p + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k>j}^n (1-a_i)^p (1-a_j)^p (1-a_k)^p \pm \dots \right. \\ \left. \pm \prod_{i=1}^n (1-a_i)^p \right)^{1/p}$$

$$S(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^p - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n a_i^p a_j^p + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k>j}^n a_i^p a_j^p a_k^p \pm \dots \pm \prod_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}.$$

Алгоритм вычисления t -конормальной функции Швайцера-Скляра S приведен ниже.

Вход. Массив четких значений (x_1, x_2, \dots, x_n) и значение p .

Выход. Значение S t -конормы.

Шаг 1. Вычислить $a_1=(A(x_1))^p, a_2=(A(x_2))^p, \dots, a_n=(A(x_n))^p$,

Шаг 2. Вычислить $S = a_n, i = n-1$.

Шаг 3. Пока $i>0$, выполнять:

3.1. Вычислить $S = a_i + (1 - a_i) \cdot S$;

3.2. Вычислить $i = i - 1$.

Шаг 4. Вычислить $S = S^{1/p}$.

Для вычисления t -норм используется свойство двойственности.

Рассмотрим ниже задание операции импликации.

Определение. Функция $I:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ является функцией импликации, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $I(0,0)=I(0,1)=I(1,1)=1$;

2) $I(1,0)=0$.

Задание операции импликации зависит от способа описания операций конъюнкции и дизъюнкции. Как правило, операция импликации определяется через операцию дизъюнкции или через функцию t -конормы:

$$a_1 \rightarrow a_2 = I(a_1, a_2) = S(1 - a_1, a_2).$$

Ниже перечислены три наиболее часто применяемые задания импликации.

1. **Импликация на функциях Заде.**

$$I(a_1, a_2) = S(1 - a_1, a_2) = \max(1 - a_1, a_2).$$

2. **Импликация на вероятностных функциях.**

$$I(a_1, a_2) = 1 - a_1 + a_2 \cdot a_1.$$

3. **Импликация Лукасевича.**

$$I(a_1, a_2) = \min(1 - a_1 + a_2, 1).$$

Нечеткий вывод

Каждое нечеткое правило в системе (1) можно представить в виде следующего отношения:

$$R_i: A_{1i} \cap A_{2i} \rightarrow B_i.$$

Объединив все правила $R = \bigcup_{i=1}^n R_i$, где $\bigcup_{i=1}^n$ — операция, соответствующая союзу "**А ТАКЖЕ**", представим нечеткую систему оценивания величин в виде следующего отношения:

$$R: A_1 \cap A_2 \rightarrow B,$$

где R — нечеткое отношение, определенное на $X_1 \times X_2 \times Y$.

Далее, объединив $A = A_1 \cap A_2$, получим $R: A \rightarrow B$. Тогда при поступлении на вход системы нечеткого входного значения D нечеткое выходное значение F , будет получено из следующего уравнения:

$$F(y) = D(x_1, x_2) \circ R(x_1, x_2, y),$$

где " \circ " — оператор композиции. Если этот оператор определить через \max — t -нормальную свертку, то

$$F(y) = \sup_{x_1, x_2} (T(D(x_1, x_2), R(x_1, x_2, y))). \quad (2)$$

Таким образом, проблема определения нечеткой оценки величин состоит в нахождении отношения R .

Пусть на вход нечеткой системы оценивания поступают две четкие оценки x_1, x_2 , на выходе системы требуется получить значение y . Нечеткое правило системы (1) в операторной форме представляется следующим образом:

$$R_i(x_1, x_2, y) = I(T(A_{1i}(x_1), A_{2i}(x_2)), B_i(y)),$$

или, с учетом того, что $I(a_1, a_2) = S(1 - a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} R_i(x_1, x_2, y) &= S(c(T(A_{1i}(x_1), A_{2i}(x_2))), B_i(y)) = \\ &= S(S(1 - A_{1i}(x_1), 1 - A_{2i}(x_2)), B_i(y)). \end{aligned}$$

Заметим, что если t -конормальная функция имеет параметр, например, параметр p в функции Швайцера-Скляра, то следует различать t -конормальные функции, определяющие импликацию и конъюнкцию (дизъюнкцию), отсюда штрих в обозначении оператора t -конормальной функции.

Оператор импликации может быть определен и не классическим путем, например, через t -нормальную функцию:

$$a_1 \rightarrow a_2 = I(a_1, a_2) = T(a_1, a_2),$$

и тогда нечеткое правило системы (1) будет иметь следующий вид:

$$R_i(x_1, x_2, y) = T(T(A_{1i}(x_1), A_{2i}(x_2)), B_i(y)),$$

Выбор оператора для выполнения операции "**А ТАКЖЕ**" связан с выбором оператора импликации. Если оператор импликации определен классическим формально-логическим методом через t -конормальную функцию, то оператор "**А ТАКЖЕ**" определяется через t -нормальную функцию:

$$\begin{aligned} R_{KL}(x_1, x_2, y) &= T(R_i(x_1, x_2, y), R_j(x_1, x_2, y), \dots, \\ R_n(x_1, x_2, y)) &= T(S(S(1 - A_{1i}(x_1), (1 - A_{2i}(x_2))), B_i(y)), \dots, \\ &S(S(1 - A_{1n}(x_1), (1 - A_{2n}(x_2))), B_n(y))). \end{aligned}$$

Если оператор импликации определен через t -нормальную функцию, то оператор "**А ТАКЖЕ**" определяется через t -конормальную функцию:

$$\begin{aligned} R_M(x_1, x_2, y) &= S(R_i(x_1, x_2, y), R_j(x_1, x_2, y), \dots, \\ R_n(x_1, x_2, y)) &= S(T(T(A_{1i}(x_1), A_{2i}(x_2)), B_i(y)), \dots, \\ &T(T(A_{1n}(x_1), A_{2n}(x_2)), B_n(y))). \end{aligned}$$

Указанный способ объединения правил совпадает с подходом, основанным на аппроксимации Мамдани [5].

Вернемся к рассмотрению уравнения (2). Если на вход нечеткой системы оценивания поступает нечеткое значение D , а четкие x_1, x_2 , то, с учетом граничных условий,

$$F(y) = R(x_1, x_2, y).$$

В системе аппроксимации Мамдани функция принадлежности выходного значения вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} F_M(y) &= S(T(T(A_{11}(x_1), A_{21}(x_2)), B_1(y)), \dots, \\ &T(T(A_{1n}(x_1), A_{2n}(x_2)), B_n(y))), \end{aligned}$$

а нечеткий выход в системе оценивания, основанной на формально-логическом подходе:

$$F_{KL}(x_1, x_2, y) = T(S(S(1 - A_{11}(x_1), (1 - A_{21}(x_2))), B_1(y)), \dots, S(S(1 - A_{1n}(x_1), (1 - A_{2n}(x_2))), B_n(y))).$$

Определение четкого значения b из нечеткого $F(y)$ или дефазификация происходит с использованием метода центра тяжести по следующей формуле:

$$b = \frac{\int_{y_1}^{y_2} yF(y)dy}{\int_{y_1}^{y_2} F(y)dy}.$$

Исследование

Рассмотрим нечеткую систему оценивания со следующей базой правил:

ЕСЛИ АНС₁ = очень малая И СНС = много меньше ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = малая И СНС = много меньше ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = средняя И СНС = много меньше ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = большая И СНС = много меньше ТО АНС₂ = малая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень большая И СНС = много меньше ТО АНС₂ = средняя,

ЕСЛИ АНС₁ = очень малая И СНС = меньше ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = малая И СНС = меньше ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = средняя И СНС = меньше ТО АНС₂ = малая,

ЕСЛИ АНС₁ = большая И СНС = меньше ТО АНС₂ = средняя,

ЕСЛИ АНС₁ = очень большая И СНС = меньше ТО АНС₂ = большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень малая И СНС = равны ТО АНС₂ = очень малая,

ЕСЛИ АНС₁ = малая И СНС = равны ТО АНС₂ = малая,

ЕСЛИ АНС₁ = средняя И СНС = равны ТО АНС₂ = средняя,

ЕСЛИ АНС₁ = большая И СНС = равны ТО АНС₂ = большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень большая И СНС = равны ТО АНС₂ = очень большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень малая И СНС = больше ТО АНС₂ = малая,

ЕСЛИ АНС₁ = малая И СНС = больше ТО АНС₂ = средняя,

ЕСЛИ АНС₁ = средняя И СНС = больше ТО АНС₂ = большая,

ЕСЛИ АНС₁ = большая И СНС = больше ТО АНС₂ = очень большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень большая И СНС = больше ТО АНС₂ = очень большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень малая И СНС = много больше ТО АНС₂ = средняя,

ЕСЛИ АНС₁ = малая И СНС = много больше ТО АНС₂ = большая,

ЕСЛИ АНС₁ = средняя И СНС = много больше ТО АНС₂ = очень большая,

ЕСЛИ АНС₁ = большая И СНС = много больше ТО АНС₂ = очень большая,

ЕСЛИ АНС₁ = очень большая И СНС = много больше ТО АНС₂ = очень большая.

Анализ работы системы проведен при поступлении на вход абсолютных четких значений из интервала $[0, 10]$, а сравнительная оценка не меняется и равна 5 ($СНС = равны$). При таких условиях легко прогнозируется выходная оценка, она равна абсолютному четкому значению на входе системы. Исследования проведены на двух множествах функций принадлежности, приведенных на рис. 1.

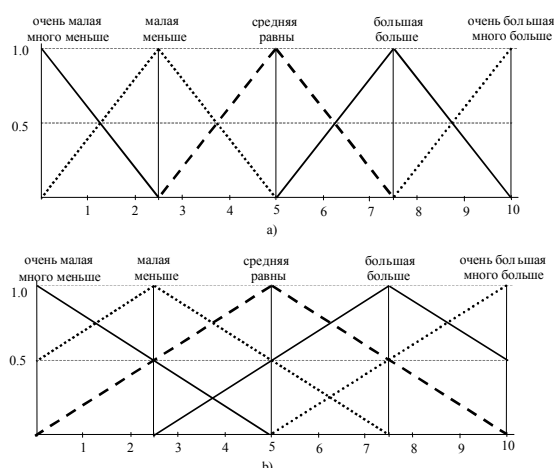


Рис. 1. Функции принадлежности

мально-логическому подходу. Ошибка вывода определялась как разность между вычисленным и ожидаемым значениями. Как следует из приведенных рисунков, отдать предпочтение какому либо типу функций невозможно, необходима настройка системы оценивания на логику пользователя.

Рамки статьи не позволяют привести результаты всех проведенных исследований. Отметим, что ошибка вывода для функций Заде и вероятностных функций не меньше, чем для ошибок, приведенных в настоящей работе.

Резюме

Любая нечеткая система, в том числе и система нечеткого оценивания, нуждается в настройке на логику пользователя. Настройка возможна путем подбора функций принадлежности, а также функций, описывающих t -нормы и t -конормы. В работе

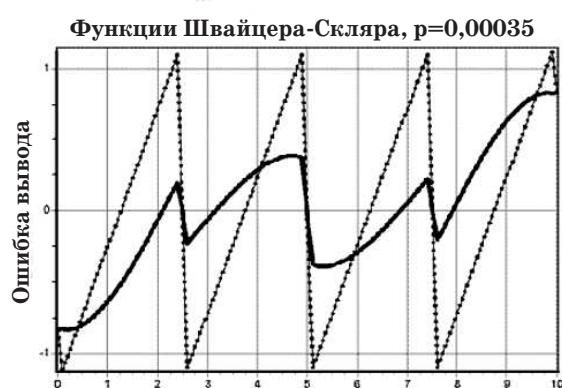


Рис. 2. Ошибки вывода для функций принадлежности типа а

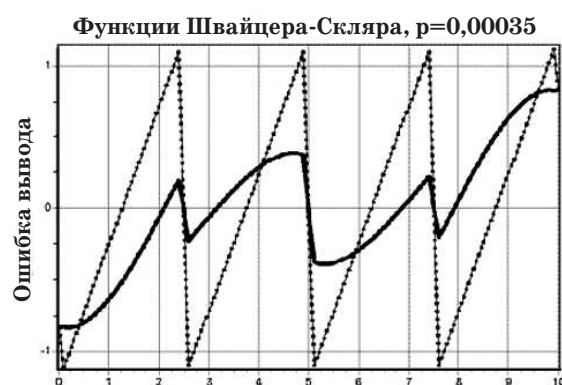
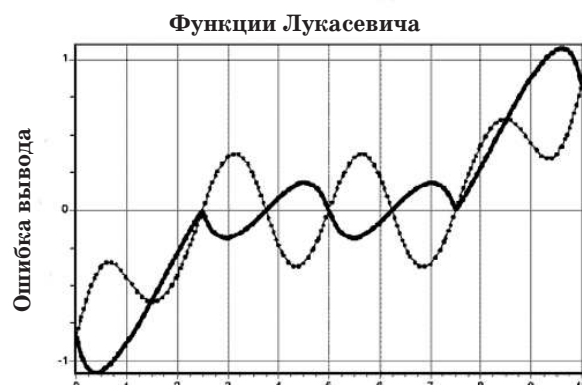


Рис. 3. Ошибки вывода для функций принадлежности типа b



На рис. 2 и 3 показаны ошибки вывода при различных функциях принадлежности и функциях, определяющих t -нормы и t -конормы. На указанных рисунках пунктирные линии соответствуют аппроксимации Мамдани, а непрерывные – фор-

приведены и проанализированы способы построения и настройки нечеткой системы оценивания. Указанные результаты могут быть использованы при построении нечетких регуляторов и иных систем нечеткого моделирования и управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивин А.А. Основания логики оценок. — М.: МГУ, 1970 — 229 с.
2. Баранов А.Н. Когнитивный статус естественно языковой оценки (к типологии языковых стратегий оценивания). Формальные и неформальные рассуждения // Ученые записки Тартуского государственного университета. Вып. 840. — Тарту: 1989. — С. 5—23.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987 — 360 с.
4. Ходашинский И.А. Псевдофизическая логика оценок величин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1988. — № 5. — С. 96—107.
5. Emami M.R., Turksen I.B., Goldenberg A.A. A unified parameterized formulation of reasoning in fuzzy modeling and control // Fuzzy Sets and Systems. — 1999. — V. 108. — P. 59—81.